http://dx.doi.org/10.23891/efdyyu.2017.14 ISSN:1305-020

Matematik Öğretmenlerine Yönelik İspat Yapma Teşhis Testi ve Teste Yönelik Dereceli Puanlama Anahtarı Geliştirilmesi[*]

Mesut ÖZTÜRK[**], Abdullah KAPLAN[***]

Öz: Matematiksel ispata yönelik yapılan çalışmalarda ispat sürecini inceleyen araştırmalar son yıllarda önem kazanmıştır. Ancak ispat yapma becerisini ortaya koyabilecek nicel veri toplama araçlarının eksikliği araştırmacıları küçük örneklemlerle nitel çalışma yapmaya sürüklemektedir. İspat yapma becerisini ölçecek nicel veri toplama araçlarının geliştirilmesi ispat sürecini inceleyen çalışmaların daha büyük örneklemlere ulaşarak daha genellenebilir sonuçlara ulaşılmasına olanak sağlayacaktır. Bu çalışma matematik öğretmenleri için ispat yapma becerisi teşhis testi ve teste yönelik dereceli puanlama anahtarı geliştirmek amacıyla yapılmıştır. 80 ortaöğretim matematik öğretmeniyle yürütülen bu çalışma da üçü geometri, üçü cebir alanında olmak üzere altı sorudan oluşan ispat yapma teşhis testi ve bu teste yönelik altı düzeyden oluşan dereceli puanlama anahtarı geliştirilmiştir. İspat teşhis testinin geliştirilmesinde sırasıyla kapsam geçerliğine ve yapı geçerliğine bakılmıştır. Ardından madde analizleri yapılmış ve güvenirlik değerleri incelenmiştir. Yapılan dört aşamalı analiz sonucunda ispat yapma becerisi teşhis testinin geçerli, üst ve alt grubu ayırt edici, orta güçlük düzeyinde ve güvenilir bir ölçme aracı olduğu saptanmıştır. İspat yapma teşhis testine yönelik dereceli puanlama anahtarının hazırlanması da; ölçüt belirlenmesi, düzeylerin saptanması, düzeylerin açıklanması ve uygunluğunun değerlendirilmesi olmak üzere dört aşamada

[*] Bu çalışma birinci yazarın doktora tezinin pilot çalışmasının bir bölümünden oluşmaktadır.

[**] Bayburt Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, mesutozturk@live.com
[***] Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, kaplan5866@hotmail.com

Gönderim:01.07.2016 **Kabul:**16.12.2016 **Yayın:**03.04.2017

http://dx.doi.org/10.23891/efdyyu.2017.9 ISSN:1305-020

yapılmıştır. Yapılan analizler sonucunda altı düzeyli dereceli puanlama anahtarının ispat yapma becerisi teşhis testini değerlendirmek için uygun olduğu belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: İspat yapma, Dereceli puanlama anahtarı, Matematik öğretmeni, Teşhis testi

Construction of Proving Diagnostic Test and Its Rubrics for Math Teacher

Abstract: In recent years, it has become important to study examining proving process in studies toward mathematical proof. However, researchers tend towards to qualitative studies with small samples due to the lack of quantitative instruments. The development of quantitative instruments to measure proving skill will provide opportunity for reached more generalizable results and research with larger samples. The purpose of this study was to development proving diagnostic test and its rubric for math teacher. The study conducted 80 secondary school math teachers. The results of this study was developed proving diagnostic test consist of six items and six levels rubric. Three of whom was interested in geometry and three of whom was included algebra. We examined content validity and construct validity in the development of proving diagnostic test, respectively. Then we have reviewed item analysis and reliability values. The results of the four-stage analysis found that proving diagnostic tests was valid, distinctive for upper and lower group, medium difficulty level and reliable instrument. Prepared of its rubric was completed four stage: determination of quota, detection of level, explanation of level and assessment of consensus. The analysis show that rubric consist of six level was appropriate to assessment of proving diagnostic test.

Keywords: Proving, Rubric, Math teacher, Diagnostic test

http://dx.doi.org/10.23891/efdyyu.2017.9 ISSN:1305-020

Giriş

Matematiksel ispat, matematiği diğer bilimlerden ayıran önemli bir beceridir (Dede ve Karakuş, 2014). Çünkü diğer bilim dallarında verilerin doğruluğu gözlem, deney veya duyu yoluyla elde edilirken matematiksel bilgilerin doğruluğu mantıksal çıkarımlar ve ispatlarla elde edilir (Cevizci, 2005). İspat bir durumun doğru olduğunu söylemenin yanında niçin doğru olduğunu açıklamayı gerekli kıldığından (Almeida, 2000; Güler, 2014; Uğurel, Moralı, Koyunkaya ve Karahan, 2016) ileri düzeyde bilişsel beceri kullanmayı gerektirerek (Fitzgerald, 1996; Senk, 1985); akıl yürütme, çıkarımda bulunma, derinlemesine anlama ve matematiksel ilişkileri kavrama gibi özellikleri geliştirir (Berggren, 1990; Solow, 2014). Dede (2013) matematikte ispatın bir varsayımın doğruluğunu göstermenin tek yolu olması, matematiksel anlamayı geliştirerek kavramların arkasında yatan gerçekleri anlamayı sağlaması, tüm zamanlarda geçerliğini sürdürmesi ve itiraz kabul etmemesi, bakımından önemli olduğunu belirtmiştir. İspat, matematiksel ifadelerin ve formüllerin veya teoremlerin gerekçelerinin görülmesini sağlayarak matematiksel kavramların anlamlandırılmasını kolaylaştıracaktır (Berggren, 1990; Solow, 2014). Ayrıca ispat bireylerin zihinsel süreçlerini geliştirmelerine katkı sağlayarak matematiksel akıl yürütme ve analitik düşünme becerilerinin geliştirilmesine katkı sunacaktır (Rice, 2014; NCTM, 2000).

Yapılan çalışmalar öğrencilerin ve öğretmenlerin ispatı sahip oldukları bilgi ve beceriyi kullanarak değil; ezberleyerek yaptıklarını ve daha önce karşılaşmamış oldukları ispatları yapmakta zorluk çektiklerini ortaya koymuştur (Harel ve Sowder, 1998; Uğurel, Moralı, Koyunkaya ve Karahan, 2016). Öğrencilerin ispatı anlayabilmesi, onların ispatı öğrenebileceği olumlu sınıf ortamı oluşturmaktan geçmektedir (Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006). Olumlu sınıf ortamının oluşturulmasında ise en önemli rol kuşkusuz öğretmenlere düşmektedir (Uğurel ve diğ., 2016). Öğretmenin öğreteceği konunun

http://dx.doi.org/10.23891/efdyyu.2017.9 ISSN:1305-020

gerekliğini ortaya koyması, neleri öğreteceğinin sınırlarını çizmesi kendi sahip olduğu bilginin derinliğiyle de ilişkili olan bir kavramdır (Shulman, 1986). Bu bağlamda matematik öğretmenlerinin geometri ve cebir ispatlarını bilmeleri bilgi derinliği oluşturmaları açısından önemlidir (İpek, 2010).

Alan yazın incelendiğinde matematiksel ispata yönelik öğretmen adaylarıyla yapılan pek çok çalışmaya rastlanmaktadır (Doruk & Kaplan, 2015; Güler & Ekmekci, 2016). Ancak öğretmenlerle yapılan çalışmaların oldukça sınırlı sayıda olduğu tespit edilmiştir (İnam & Uğurel, 2016). Ball, ThamesvePhelps (2008) özel alan bilgisinin önemine vurgu yaparak, bu kavramın yalnız öğretim ortamında kullanılabilecek alan bilgisi olarak ifade edilebileceğini belirtmiştir. Bu bağlamda henüz görev almamış öğretmen adaylarının yanı sıra, halen görev yapmakta olan öğretmenlerin bilgilerini belirlemeye yönelik yapılacak çalışmaların da önemli olduğu söylenebilir. Nitekim öğretmenlerle yapılan çalışmalar öğretmenlerin alan bilgisinin yeterli düzeyde olmadığına işaret etmektedir (LoveLuo, 2012). Matematik öğretmenleriyle yapılan çalışmaların henüz yeni olduğu göz önünde bulundurulduğunda öğretmenin ispat yapma becerisini teşhis etmeye yönelik bilgi ölçen, farklı alanlardan önermelerin yer aldığı, farklı ispat yöntemleri gerektiren nicel ölçme ve değerlendirme araçlarının geliştirilmesi gerektiği söylenebilir. Nitekim ispat yapma becerisini ortaya koyabilecek nicel araçların eksikliği araştırmacıları küçük örneklemlerle nitel çalışma yapmaya sürüklemektedir. İspat yapma becerisini ölçecek nicel veri toplama araçlarının geliştirilmesi ispat sürecini incelemede daha büyük örneklemlere ulaşılarak daha genellenebilir araştırmalar yapılmasına olanak sağlayacaktır.

Matematik öğretmenlerinin ispat yapma becerilerini teşhis edebilmek için sadece sonucun değerlendirilebileceği bir ölçme aracı kullanılması yeterli değildir. Çünkü ispat yapma bilişsel bir süreç olup süreçte yapılan her işlemin adım adım değerlendirilmesi

http://dx.doi.org/10.23891/efdyyu.2017.9 ISSN:1305-020

gerekmektedir. Ancak bu tür açık uçlu soruların değerlendirilmesinde kişisel yargılar değerlendirmeye katılabilir (Cooney, Sanchez, & Ice, 2001). Objektif bir değerlendirmenin yapılabilmesi için puanların değerlendirilmesinin nesnel olması gerekir (Başol, 2015). Bu nedenle ispat yapma teşhis testini nesnel değerlendirmeye imkân verecek dereceli puanlama anahtarının hazırlanması gerekmektedir.

Alan yazın incelendiğinde ispatı derecelendirmeye yönelik farklı sınıflandırmalar olduğu görülmüştür (Doruk & Kaplan, 2015; Güven, Çelik, & Karataş, 2005; Senk, 1985). Yapılan sınıflamalardan bazıları karşılaştırmalı olarak Tablo 1'de sunulmuştur.

Tablo 1. İspatı değerlendirmeye yönelik yapılan derecelendirmelerin karşılaştırılması

Senk (1985)	Güven, Çelik & Karataş (2005)	Kaplan ve Doruk (2015)
0.Seviye: Öğrenci hiçbir şey yazmaz, sadece verilenleri yazar veya geçersiz ya da çıkarımda bulunmadan yazar 1.Seviye: Öğrenciler en azından bir geçerli çıkarımda bulunur veya gerekçeyi yazar 2.Seviye: Öğrenci bir akıl yürütme zinciri kullanarak deliller gösterir: ispatın yarısı hakkında çıkarımda bulunarak ispatı tamamlar veya gerekçeyi sistematik biçimde yazarlar ancak geçersizdir. Çünkü önceki adımlarda akıl yürütme hatalıdır. 3.Seviye: Öğrenci ispatı adım adım mantık dâhilinde yazar ama sembollerde, ifadelerde veya teorem isimlerinde hata yapar. 4.Seviye: Öğrenci sembollere dayalı olarak en fazla bir sembolik hata ile geçerli ispat yazar.	0.Seviye: Öğrenci mantıksal çıkarımda bulunmaz veya soruyu boş bırakır. 1.Seviye: Öğrenci yalnız bir doğru mantıksal çıkarımda bulunur ancak devam ettiremez. 2.Seviye: Öğrenci ardı ardına birkaç doğru mantıksal çıkarımda bulunabilir ancak sonuca götüremez. 3.Seviye: Öğrenci belli adımları atlayarak ve sembolik gösterimlerde hatalar yaparak ispatı tamamlar. 4.Seviye: Sembolik gösterimlerde hatalar vardır ancak ispatı tamamlar. 5. Seviye: Öğrenci eksiksiz olarak ispatı tamamlar.	Tamamlanmamış ispat: İspatı yazamaz veya hatırlayamaz Yanlış İspat: İspatı yanlış yazar Geçersiz ispat: İspatı doğru yazar, ancak gerekçelendirme yetersizdir. Doğru ispat: İspatı doğru yazar ve yeterince gerekçelendirir.

http://dx.doi.org/10.23891/efdyyu.2017.9 ISSN:1305-020

Tablo 1 incelendiğinde üç farklı derecelendirmenin benzerlikleri ve farklılıkları olduğu görülmektedir. Güven, Çelik & Karataş (2005) ve Senk (1985) derecelendirmeyi geometri ispatlarına göre yaparken Kaplan ve Doruk (2015) cebir ispatlarına göre derecelendirme yapmışlardır. Hem geometri hem de cebir ispatlarını değerlendirebilecek genel bir ispat değerlendirme puanlama anahtarının yapılması hem cebir hem de geometri ispatlarını içeren testleri değerlendirmede kolaylık sağlayacaktır. Yukarıda sıralanan gerekçeler doğrultusunda bu çalışma matematik öğretmenleri için ispat yapma teşhis testi ve teste yönelik dereceli puanlama anahtarı geliştirilmesi amacıyla yapılmıştır.

Yöntem

Çalışmada nicel araştırma yöntemlerinden betimsel araştırma modeli kullanılmıştır. Betimsel araştırmalar genel olarak başarı, tutum, öz-yeterlik gibi bir durumu ortaya koymak amacıyla yapılmaktadır. Durum ilk kez ortaya konulmak isteniyorsa betimsel araştırma yönteminin kullanılması oldukça önemlidir. Betimsel araştırmalar pilot çalışma olarak kullanılıp durumun tespitini sağlayabileceği gibi, bir davranışın düzeyini ölçmek amacıyla da kullanılabilir. Basit betimsel araştırmalarla bir olgu betimlendikten sonra farklı araştırma yöntemleriyle incelenebilir (McMillan ve Schumacher, 2014). Bu çalışmada sonraki çalışmalar için kullanılabilecek bir teşhis testi geliştirildiğinden betimsel araştırma modeli tercih edilmiştir.

Çalışma Grubu

Bu araştırmanın çalışma grubunu Bayburt ve Gümüşhane illerinde görev yapan ortaöğretim matematik öğretmenleri oluşturmaktadır. Çalışma grubu amaçlı örnekleme yöntemiyle seçilmiştir. Erkuş (2012) ölçme aracı geliştirme çalışmalarında amaçlı örnekleme yönteminin kullanılmasını önermektedir. Çalışmada Bayburt ilinin seçilmesinin nedeni araştırmacının bu ilde görevli olmasından kaynaklanmaktadır. Çalışmaya Bayburt ilinde

http://dx.doi.org/10.23891/efdyyu.2017.9 ISSN:1305-020

görev yapan öğretmenler dâhil edilmiş ancak bu ilde görev yapan ortaöğretim matematik öğretmeni sayısının test geliştirme için yeterli olmadığı saptanmıştır. Bayburt iline eğitim seviyesi ve sosyal-kültürel açıdan en yakın il olan Gümüşhane'de görev yapan ortaöğretim matematik öğretmenleri de çalışmaya dâhil edilmiştir. Çalışmaya 80 ortaöğretim matematik öğretmeni katılmıştır. Çalışmaya katılan öğretmenlerin demografik özellikleri Tablo 2'de sunulmuştur.

Tablo 2. Örnekleme ilişkin demografik özellikler

		f	%
İl	Bayburt	40	50.0
	Gümüşhane	40	50.0
Cinsiyet	Kadın	43	53.8
	Erkek	37	46.2
Mezun olduğu bölüm	Fen Fakültesi Matematik Bölümü	32	40.0
	Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik	48	60.0
Görev yaptığı kurum	Fen Lisesi	9	11.3
	Anadolu Lisesi	26	32.6
	Meslek Lisesi	19	23.8
	İmam-Hatip Lisesi	4	5.0
	Sosyal Bilimler Lisesi	8	10.0
	Çok Programlı Lise	5	6.2
	Düz Lise	6	7.5
	Özel Kolej	3	3.7
Deneyim	0-5 yıl	32	40.0
	6-10 yıl	28	35.0
	11-15 yıl	16	20.0
	16 yıl ve üzeri	4	5.0

Çalışmaya katılan öğretmenlerin tamamı Türk olup, test soruları Türkçe dilinde hazırlanmış ve uygulanmıştır. Çalışmada öğretmenlerle yapılan görüşmelerde Ö1-Ö6 gibi kod isimler kullanılmıştır. Bu kodlama sisteminde Ö, öğretmeni ifade ederken yanındaki

http://dx.doi.org/10.23891/efdyyu.2017.9 ISSN:1305-020

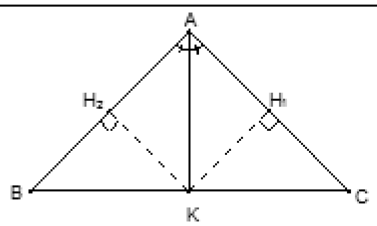
rakam sadece sınıflandırma ve farklı öğretmenler olduğunu ifade etme amacıyla kullanılmıştır.

Veri Toplama Aracı

İspat yapma becerisi teşhis testinin oluşturulması.

İspat yapma becerisi teşhis testinin oluşturulmasında ilk olarak geometri ve cebir ispat sorularını içeren 30 soruluk bir soru havuzu oluşturulmuştur. Oluşturulan soru havuzundan farklı türde soruların seçilmesiyle üç farklı informal mülakat formu hazırlanmıştır. İnformal mülakat formlarında; aynı kazanımı ölçmeye yönelik sorular aynı soru numarasına sahip olacak şekilde sorularak mülakat formlarına yerleştirilmiştir. Mülakat formundaki her soru farklı kazanıma ait hazırlanmıştır. Başka bir ifadeyle, formun birinde bir soru sözel olarak sorulmuş, diğerinde şekil ile sorulmuş, üçüncü formda ise aynı kazanıma yönelik benzer bir soru sorulmuştur. Sorulardan bir örnek vermek gerekirse, ilk formdaki soru Şekil 1'de, ikinci formdaki soru Şekil 2'de ve üçüncü formdaki soru Şekil 3'de sunulmuştur.

2.



Yandaki ABC üçgeninde AK açıortaydır.
$\frac{|KC|}{|KB|} = \frac{|AC|}{|AB|}$ olduğunu gösteriniz.

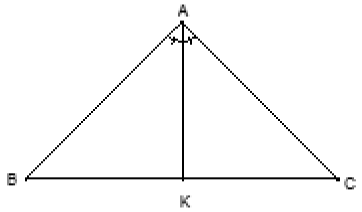
Şekil 1. İlk formda sunulan 2. Soru

2. "Bir üçgende bir iç açının açıortayının bu açının karşısındaki kenarı kestiği noktanın, diğer iki köşeye uzaklıkları oranı açının o köşeleri tarafındaki kenar uzunluklarının oranına eşittir." Önermesinin doğruluğunu gösteriniz?

Şekil 2. İkinci formda sunulan 2. Soru

http://dx.doi.org/10.23891/efdyyu.2017.9 ISSN:1305-020

2.



Yandaki ABC üçgeninde AK açıortaydır.
$\frac{|KC|}{|KB|} = \frac{|AC|}{|AB|}$ olduğunu gösteriniz.

Şekil 3. Üçüncü formda sunulan 3. Soru

Şekil 1-3 incelendiğinde aynı kazanıma yönelik soruların farklı şekilde sorulduğu görülmektedir. Çalışmada seçilen geometri sorularının ispatında detaylı ek çizimler gerektirmeyen ya da çözümü için fazlaca teoremden yararlanmayı gerektirmeyen önermeler seçilmiştir. Cebir soruları da soyut matematik ve sayılar teorisi kitaplarında çok sık rastlanan ve çözümü ileri düzey bilgi gerektirmeyen türden seçilmiştir. Oluşturulan her bir informal mülakat formu 10 soru içermektedir. Oluşturulan form ilk olarak matematik eğitimi alanında uzman bir öğretim üyesine sunulmuş ve alınan görüşler doğrultusunda ikinci formdaki yedinci soru düzeltilmiştir. Ardından form matematik eğitimi alanında uzman ikinci bir öğretim üyesine sunulmuş ve soruların uygun olduğu belirlenmiştir. Son olarak yine matematik eğitimi alanında uzman bir öğretim üyesine sunulmuş, soruların uygun olduğuna dair görüş alınmıştır. Formlara son hali verilerek her form iki ortaöğretim matematik öğretmenine sunulmuş, toplam altı matematik öğretmeniyle yapılandırılmamış mülakat yürütülmüştür. Bu mülakatlarda öğretmenlerden soruları çözmeleri istenmiş ve çalışmanın amaçlarıyla soruların uygunluğunu değerlendirmeleri istenmiştir. Öğretmenlerin yaptığı çözüm stratejileri, önerileri alınmış ve hangi tür ispat yaptıkları incelenmiştir. Öğretmenlerden alınan görüşler doğrultusunda ispat yapma teşhis testinde (başarı testinde) kullanılacak olan sekiz soru seçilmiştir. Seçilen sekiz sorunun uygulanmasında süre konusu ve soru sayısı dikkate alınarak soru sayısı 6'ya düşürülmüştür. Soruların seçim sürecinde öğretmenlerle yapılan görüşmelerden diyaloglar Tablo 3'de sunulmuştur.

http://dx.doi.org/10.23891/efdyyu.2017.9 ISSN:1305-020

Tablo 3. Öğretmenlerle ($Ö_1$-$Ö_2$) yapılan görüşmelerden diyaloglar

$Ö_1$	$Ö_2$
[04.57] Ö1: Buradaki bu yüksekliğini çizme nedeniniz nedir, ipucu mu? [05.00] A: Hocam ipucu olarak verdik. Bunu vermemiz anlamlı olur mu? [05.11] Ö1: Şimdi bu ipucunu vermenizin anlamı şu, ben bunun ispatını alandan yapmalıyım [05.19] A: Yani bu alana mı yönlendiriyor diyorsunuz? Bunun verilmiş olması şu dikmelerin verilmiş olması [dikmeleri gösterir] alana mı yönlendiriyor? [05.25] Ö1: Yani siz bunu verince alandan çözüme yönlendiriyorsunuz. Bence bu ipucu verilmemeli. Zaten zor bir çözüm değil. Farklı çözüm yöntemlerini de görmek isterseniz, bu ipucunu kaldırın.	[08.31] Ö2: Pisagor Teoremini [içinden okuyor] özel olarak [içinden çözüyor] 90 derece kosinüs teoremini kullanabilirim mesela değil mi? a [içinden söylüyor] şuraya c diyelim buraya b diyelim buraya a diyelim $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos 90$ Dersem burası sıfır olur $a^2 = b^2 + c^2$ olur. [09.08] A: Kosinüs Teoremi kullanmayınız desek nasıl yaparsınız? [09.24] Ö2: Başka nasıl yapılabilir? [09.25] A: Aklınıza gelen bir durum var mı? [09.46] Ö2: Her üçgenin bir çevrel çemberi var diyoruz… $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ Buradan mı gidiyoruz? [10.16] A: Çıkabilir. Bir deneyin isterseniz. [10.22] Ö2: Şu an bunun üzerine kafa yoramıyorum. Daha öncede hiç kafa yormadım yani.

Tablo 3'deki görüşmede öğretmen açıortay sorusunu içeren ikinci sorudan ipucunun çıkarılmasını önermiştir. Ancak soruda verilen ipucunun çıkarılmasının sorunun çözümünü zorlaştıracağı göz önünde bulundurularak soru formda görüldüğü şekilde sorulmuştur. Değişiklik yapılan bir soru geometrinin üçüncü sorusu olan Pisagor bağıntısı sorusudur. Pisagor bağıntısında öğretmenlerden beşinin soruyu Kosinüs teoremi yardımıyla çözdükleri ve bu çözümde sürece dair veri alınamadığı belirlenmiştir. Ö2 ile yapılan görüşmede bu durumu destekler niteliktedir (bkz. Tablo 3).

İspat yapma becerisi teşhis testinin dereceli puanlama anahtarının oluşturulması

Dereceli puanlama anahtarının hazırlanmasında sonuca ulaşmada önemli olan ölçütler belirlenir ve belirlenen ölçütlere ulaşma derecesine göre puanlama yapılır (Akkuş ve

http://dx.doi.org/10.23891/efdyyu.2017.9 ISSN:1305-020

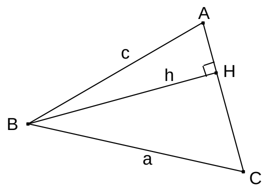
Duatepe-Paksu, 2006; Çepni, 2007). Bu çalışmada holistik rubrik (dereceli puanlama anahtarı) hazırlanmıştır. Holistik dereceli puanlama anahtarı bir beceriyi değerlendirmede parçalar halinde değil, bütüncül bir değerlendirme sağlar (Çepni, 2007). Bu çalışmada geliştirilen test bir teşhis testi olup, sonuçta toplam puana dayalı değerlendirme yapmayı gerektirdiğinden holistik dereceli puanlama anahtarı tercih edilmiştir. Dereceli puanlama anahtarının hazırlanmasında alan yazın dikkate alınarak (Doruk & Kaplan, 2015; Güven, Çelik, & Karataş, 2005; Senk, 1985) ölçütler belirlenmiş, bu ölçütlere bağlı olarak düzeyler tespit edilmiş ve yapılan uygulama sonucunda öğretmenlerden alınan cevaplar doğrultusunda beklentiler yazılmıştır.

Bulgular ve Tartışma

Kapsam Geçerliği

Elde edilen görüşmeler sonucunda çalışmada kullanılan altı soru ve kazanımlarını içeren belirtke tablosu Tablo 4'de sunulmuştur.

Tablo 4. Formda kullanılan altı soru için hazırlanan belirtke tablosu

No		Önerme	Kazanım
1		"Bir üçgende iki iç açıortayın kesişimlerinin oluşturduğu açının ölçüsü üçüncü açının ölçüsünün yarısının 90° fazlasıdır." önermesinin doğruluğunu gösteriniz.	➢ Üçgenin temel ve yardımcı elemanlarını çizerek ispatta kullanır.
2	Geometri	 Şekildeki gibi bir ABC üçgeninde $\|AB\| = c$, $\|BC\| = a$, $\|AC\| = b$ ve $\|BH\| \perp \|AC\|$ dir. O halde $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos(\hat{A})$ olduğunu gösteriniz. (Kosinüs Teoremi)	➢ Öklid geometrisindeki temel teoremlerin ispatını yapar.

http://dx.doi.org/10.23891/efdyyu.2017.9 ISSN:1305-020

3	Kosinüs teoremini kullanmadan, Pisagor Teoremini ispatlayınız.	➢ Üçgende alan ve kenar arasındaki ilişkileri kurar. ➢ Öklid geometrisindeki temel teoremlerin ispatını yapar.
4	$\forall x \in R\ için\ (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$olduğunu ispatlayınız.	➢ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$biçimindeki özdeşliğin doğruluğunu ispat yöntemlerini kullanarak gösterir.
5	*“Tamsayılar kümesi üzerinde 3 ve 4 ile bölünebilen her sayı 12 ile bölünebilir.”* İfadesinin doğruluğunu gösteriniz.	➢ Tamsayılarda bazı bölünebilme kurallarının doğruluğunu farklı ispat yöntemleriyle gösterir. ➢ Sayılar teorisinin önemli ispatlarını anlayarak yapar.
6	*"İki tek sayının çarpımı yine bir tek sayıdır"* Önermesinin doğruluğunu gösteriniz.	➢ Sayılar teorisinin önemli ispatlarını yapar.

Hazırlanan belirtke tablosu ilk olarak iki ölçme-değerlendirme uzmanına sunulup görüşleri alınmıştır. Ardından beşi matematik öğretmeni, dokuzu matematik eğitimi alanında doktora yapmış, altısı da fen fakültesi matematik alanında doktora yapmış 20 uzmana sunulmuştur. Ayrıca her bir madde için kapsam geçerlik indeksi hesaplanmış ve Tablo 4’de sunulmuştur.

Tablo 5. Her bir sorunun Kapsam Geçerlik Oranı (KGO)

	Soru 1	Soru 2	Soru 3	Soru 4	Soru 5	Soru 6
KGİ	1	.50	.60	.60	.80	.80

Tablo 5 incelendiğinde KGO değerlerinin .50-1.00 aralığında değiştiği belirlenmiştir. 6 soru için ortalama KGO değeri .72 olarak hesaplanmıştır. Bu değer kapsam geçerliği için yeterli görülmektedir (Lawshe, 1975). Uzmanlardan alınan görüşler doğrultusunda kazanımlar üzerine tartışmalar yürütülerek ortak noktada buluşulduğunda, kazanım olarak karar kılınmıştır. Oluşan son form bir ölçme değerlendirme uzmanına sunulmuş ve soruların kazanımlara uygun olduğuna karar verilmiştir.

Yapı Geçerliği

http://dx.doi.org/10.23891/efdyyu.2017.9 ISSN:1305-020

Yapı geçerliği için Açımlayıcı Faktör Analizi (AFA) yapılarak ölçeğin yapısı hakkında bilgi edinilmiştir. Örneklem büyüklüğünün analiz için yeterli olup-olmadığını gösteren KMO değeri $.70$ olarak bulunmuştur. Seçer (2015) .70 ve üzerinin örneklem büyüklüğü için kabul edilebilir değer olduğunu belirtmiştir. Bu çalışmada bulunan değer örneklem büyüklüğünün yeterli olduğunu göstermektedir. Verilerin normallik varsayımlarının sağlanabilirliğini gösteren Barlett testi sonuçlarının da anlamlı olduğu saptanmıştır $(x^2 = 87.339, sd = 15, p < .01)$. Bu değerler Çokluk, Şekercioğlu ve Büyüköztürk'e (2014) göre AFA'nın varsayımlarının karşılandığını göstermektedir. Durmuş, Yurtkoru ve Çinko (2013) KMO değerinin yapının bütününe ait uygunluğu ölçtüğünü belirtirken, MSA (Measures of SamplingAdequacy) değerinin de her bir sorunun faktör analizine uygunluğunu gösterdiğini ifade etmişlerdir. MSA değerlerini gösteren Anti-imaj matrisi Tablo 6'da sunulmuştur.

Tablo 6. Anti-imaj korelasyon matrisi sonucu

	1	2	3	4	5	6
Soru 1	.580[a]	-	-	-	-	-
Soru 2	-.150	.820[a]	-	-	-	-
Soru 3	-.418	-.122	.701[a]	-	-	-
Soru 4	-.184	-.120	-.002	.808[a]	-	-
Soru 5	-.168	-.195	-.104	-.179	.781[a]	-
Soru 6	.337	-.165	-.223	-.125	-.249	.525[a]

Tablo 6 incelendiğinde tüm değerlerin $.50$'nin üzerinde olduğu yani AFA için uygun olduğu belirlenmiştir. Yapı tek faktörlü tasarlandığı için, döndürme işlemi yapılmamıştır. Çokluk ve diğ. (2014) tek faktörlü olarak geliştirilen testlerde döndürme işleminin yapılmayacağını belirtmektedir. Maddelerin her birinin faktör yük değerleri Tablo 7'de sunulmuştur.

Tablo 7. Maddelerin her biri için faktör yük değerlerinin dağılımı

http://dx.doi.org/10.23891/efdyyu.2017.9 ISSN:1305-020

	Soru 1	Soru 2	Soru 3	Soru 4	Soru 5	Soru 6
Faktör Yük Değeri	.62	.70	.71	.62	.73	.46

Tablo 7 incelendiğinde, tek faktörlü yapının her bir maddesinin faktör yük değerlerinin $.46 - .73$ aralığında olduğu belirlenmiştir. Seçer (2015) madde faktör yük değerlerinin .32 ve üzerinde olması gerektiğini ifade etmektedir. Bir faktörleştirme sonucunda altı maddelik yapının toplam varyansın %41.41'ini açıkladığı bulunmuştur. Çokluk ve diğ. (2014) tek faktörlü desenlerde toplam varyansın %30'unun'açıklanmasını yeterli görmektedirler. Yapılan analizler sonucunda ispat yapma teşhis testinin altı sorudan ve tek faktörden oluşan bir yapıda olduğu belirlenmiştir.

Madde Analizi

Oluşan başarı testine tek faktörlü yapılar için Klasik Test Teorisine dayalı madde analizleri yapılmıştır. Test açık uçlu olduğu için madde ayırt edicilik (Madde geçerliği) ve madde güçlük oranı (Madde onaylanma oranı) ile güvenirlik değerleri hesaplanmıştır. Madde ayırt ediciliğinin hesaplanmasında "maddenin içinde bulunduğu ölçek ya da alt ölçek toplam puanları açısından alt ve üst %27'lik grupların o madde için karşılaştırılmasına dayanan teknik" (Erkuş, 2012) kullanılmıştır. Bu teknikle madde ayırt edicilik indeksleri hesaplanırken, elde edilen verilerden 22'si alt grup, 22'si üst grup olarak ayrılmış ve alt grupla üst grup arasındaki farka t testi ile bakılmıştır. Maddelerin her biri için t değerleri ve anlamlılığı Tablo 8'de verilmiştir.

Tablo 8. Maddelerin her biri için t değerlerinin dağılımı

	Soru 1	Soru 2	Soru 3	Soru 4	Soru 5	Soru 6
t	6.10**	4.86**	9.05**	5.07**	7.16**	3.17**

** .01 düzeyinde anlamlılık

Tablo 8 incelendiğinde üst grupla alt grup arasında her maddenin anlamlı düzeyde ayırt edici olduğu belirlenmiştir. Madde güçlük oranının (MGO) hesaplanmasında

http://dx.doi.org/10.23891/efdyyu.2017.9 ISSN:1305-020

$\frac{Maddeninortalaması}{Maddedenalınabilecekmaksimumpuan}$ formülü kullanılmıştır. Bu formüle göre her bir madde için madde güçlük oranı hesaplanmış ve Tablo 8'de sunulmuştur.

Tablo 9. Her madde için hesaplanan madde güçlük oranı

	Soru 1	Soru 2	Soru 3	Soru 4	Soru 5	Soru 6
MGO	0.65	0.72	0.48	0.73	0.52	0.80

Tablo 9 incelendiğinde madde güçlük oranının .48-.80 aralığında olduğu görülmektedir. Kubiszyn ve Borich (2013) .20 ile .80 arasında hesaplanan değerlerin madde güçlüğü için yeterli olduğunu; ancak .50 civarında bulunmasının en ideal değer olduğuna işaret etmiştir. Hesaplanan değerlerin madde güçlük oranı için uygun olduğu belirlenmiştir.

Güvenirlik

Hazırlanan başarı testinin güvenirliğinde testin duyarlılığı ve tutarlılığı incelenmiştir. Testin duyarlığı her bir maddeden alınacak puanların hangi değer aralığında olacağı ile ilgilidir (Baykul, 2015). Testin duyarlılığını sağlayabilmek için her bir madde 0-5 puan aralığında derecelendirilerek değerlendirilmiştir. Tutarlık hesabında, her bir maddenin testin bütünüyle olan tutarlığına bakılır. Testin iç tutarlığını sağlamak için Cronbach Alpha güvenirlik katsayısı hesaplanmıştır. Hesaplanan değer .77 olarak bulunmuştur. Field (2009) başarı testleri için .65 ve üstünün yeterli olduğunu belirtmektedir. Bu çalışmada bulunan değer altı sorudan oluşan başarı testinin güvenilir olduğunu göstermektedir.

Dereceli Puanlama Anahtarına Yönelik Elde Edilen Bulgular

Alan yazın göz önünde bulundurularak dereceli puanlama anahtarı için önermeyi anlama, sembolik ifade kullanma, sezgisel ispatlama ve ispatı eksiksiz tamamlama olarak dört ölçüt belirlenmiştir. Belirlenen ölçütler ve testin duyarlılığı da göz önünde bulundurularak dereceli puanlama anahtarı için altı düzey belirlenmiştir: Soruyu cevaplayamama, önermeyi anlayabilme ama ispatı yapamama, sembolik ifade kullanmama,

http://dx.doi.org/10.23891/efdyyu.2017.9 ISSN:1305-020

sezgisel ispat yama, ispatı tamamlayamama, hatalı sembolik ifade kullanma ve ispatı eksiksiz tamamlama. Yapılan uygulamalar neticesinde öğretmenlerin verdiği farklı cevaplar için en yüksek düzeyden başlayarak beklentiler belirlenmiştir. Hazırlanan dereceli puanlama anahtarı Tablo 10'da sunulmuştur.

Tablo 10. Dereceli puanlama anahtarı

Puanı	Açıklama
5	➢ İspatı eksiksiz olarak tamamlar.
4	➢ İspatı tamamlar, ancak sembolik gösterimlerde hata vardır. ➢ Tanım kümesini yazmaz veya ispatın son aşamasını yeterince açıklamaz. ➢ İspatını tamamlar ancak, işlemlerin gerekçesini (dayandırdığı teoremleri) yazmaz.
3	➢ Ardı ardına birkaç mantıksal çıkarımda bulunarak sembolik ifade kullanır. Ancak sonuca ulaşmak için yeterli değildir. ➢ İspatı yapar ancak matematiksel dilden (notasyonlardan) uzaktır. ➢ İspatı anlar, doğru strateji seçer; ancak stratejiyi yanlış uygular.
2	➢ İspatı anlamak için gerekli çıkarımları yapar. Ancak sembolik ifade kullanmaz. ➢ İspatı anlar; ancak yanlış strateji seçerek, sonuca ulaşır. ➢ Örnekler yardımıyla genelleme yapar. ➢ İspatın doğruluğunu anlatır (Sezgisel ispat yapar).
1	➢ İspatı anlamaya yönelik farklı işlemler yapar (Doğru şekil çizme gibi). ➢ Verilenleri ve istenenleri yazar (Hipotez-Hüküm). ➢ İspatı yarım bırakır (Sadece tanımları veya sonucu yazar). ➢ Tanım kümesini eksik veya yanlış yazarak ispata başlar ve ispatı tamamlar.
0	➢ Soruyu cevaplamaz. ➢ Sadece verilenleri yazar. ➢ Önerme ile ilgisiz ifadeler kullanır veya verileri ve işlemleri rasgele kullanır. ➢ Önermenin karşıtının doğru olduğunu gösterir.

Hazırlanan dereceli puanlama anahtarının ispat yapma becerisi teşhis testine uygunluğunu test etmek amacıyla form matematik eğitimi alanında 25 lisansüstü eğitim öğrencisine sunulmuştur. Bu lisansüstü eğitim öğrencilerine çalışmanın amacı, kapsamı, ölçülmek istenen özellikler ve verilen önermeler için yapılan farklı ispatlar hakkında bir saatlik seminer verilmiştir. Lisansüstü öğrencilerinden dereceli puanlama anahtarını sorulara uygunluğu açısından uygun-uygun değil biçiminde değerlendirmeleri istenmiştir. Lisansüstü öğrencilerinden alınan görüşler doğrultusunda her bir soru için uygunluk oranının .56-.92 aralığında olduğu saptanmıştır.

http://dx.doi.org/10.23891/efdyyu.2017.9 ISSN:1305-020

Sonuç ve Öneriler

Matematik öğretmenlerinin ispat yapma becerilerini teşhis etmeye yönelik ölçme aracı ve dereceli puanlama anahtarı geliştirmek amacıyla yapılan bu çalışmada altı sorudan oluşan ispat yapma teşhis testi ile altı düzeyden oluşan dereceli puanlama anahtarı ortaya konulmuştur. İspat teşhis testinin geliştirilmesi dört aşamada tamamlanmıştır. İlk aşamada kapsam geçerliği incelenmiştir. Kapsam geçerliğinde, altı sorudan oluşan form için hazırlanan belirtke tablosu uzmanlara sunularak değerlendirmeleri istenmiştir. Uzmanlardan alınan görüşler doğrultusunda ölçme aracının kapsam geçerlik düzeyinin her bir soru için yeterli olduğuna karar verilmiştir. İkinci olarak yapı geçerliğine bakılmıştır. Yapı geçerliği için yapılan AFA sonucunda altı soruluk testin tek faktörlü bir yapı teşkil ettiği saptanmıştır. Her bir madde için faktör yük değerlerinin yeterli düzeyde olduğu belirlenmiştir. Bir faktörleştirme işlemi sonucunda altı maddeden oluşan yapının toplam varyansın %41'ini açıkladığı belirlenmiştir. Üçüncü aşamada madde analizleri yapılmıştır. Madde analizinde Klasik Test Teorisine göre hesaplamalar yapılmıştır. Geliştirilen test açık uçlu olduğu için madde ayırt edicilik ve madde güçlük değerlerinden yararlanılmıştır. Madde ayırt edicilik indeksleri hesaplanırken t değerlerine bakılmış ve her bir madde için .01 düzeyinde anlamlı olduğu saptanmıştır. Madde güçlük oranının hesaplanmasında $\frac{Maddeninortalaması}{Maddedenalınabilecekmaksimumpuan}$ formülünden yararlanılmıştır. Yapılan analizler sonucunda tüm sorular için madde güçlük oranının yeterli olduğu belirlenmiştir. Son aşama olarak geliştirilen teste güvenirlik analizleri yapılmıştır. Yapılan güvenirlik analizi sonucunda ölçme aracının güvenirliğinin yeterli düzeyde olduğu bulunmuştur.

İspat yapma becerisi teşhis testine yönelik dereceli puanlama anahtarının hazırlanması dört aşamada yapılmıştır. İlk olarak dereceli puanlama anahtarı için dört ölçüt belirlenmiştir: Önermeyi anlama, sembolik ifade kullanma, sezgisel ispatlama ve ispatı eksiksiz tamamlama.

http://dx.doi.org/10.23891/efdyyu.2017.9 ISSN:1305-020

İkinci olarak belirlenen ölçütlere bağlı olarak testin duyarlılığı da göz önüne alınarak soruyu cevaplayamama, önermeyi anlayabilme ama ispatı yapamama, sembolik ifade kullanmama, sezgisel ispat yama, ispatı tamamlayamama, hatalı sembolik ifade kullanma ve ispatı eksiksiz tamamlama olarak altı düzey ortaya konulmuştur. Üçüncü olarak en yüksek düzeyden en düşük düzeye doğru beklentilerin açıklaması yazılmıştır. Son olarak testin dereceli puanlama anahtarıyla uygunluğunu belirlemek için uzman görüşü alınmıştır. Uzmanlardan alınan görüşler doğrultusunda geliştirilen dereceli puanlama anahtarının ispat yapma becerisi teşhis testini değerlendirmede yeterli olduğu saptanmıştır.

Bu çalışma bazı sınırlılıklara sahiptir. Bu sınırlılıklardan ilki örneklem büyüklüğüdür. Çalışma sadece ortaöğretim matematik öğretmenleriyle yürütüldüğünden çalışmaya katılan öğretmen sayısı yüksek olmamıştır. Bu eksikliği giderebilmek için başarı testinde soru sayısı azaltılmıştır. Çalışmadaki bir diğer sınırlılık ise madde analizlerinde klasik test teorisinin kullanılmasıdır. Son yıllarda madde tepki kuramının kullanılmasını öneren çalışmalar ağırlık kazanmıştır. Ancak Erkuş(2012) klasik test teorisinde madde ayırt edicilik için hesaplanan t-değerinin madde tepki kuramında hesaplanan madde ayırt ediciliğinden çok farklı olmadığını ifade etmektedir.

Hazırlanan bu ölçme aracı ve ona bağlı olan dereceli puanlama anahtarı değişik amaçlar için kullanılabilir. İspat sürecini incelemeye yönelik yapılacak çalışmalarda öğretmenleri başarı gruplarına ayırmada bu testin oldukça yararlı bir araç olacağı düşünülmektedir. Ayrıca geliştirilen test hem geometri, hem de cebir sorularını içerdiği için kullanıldığında değerlendiriciye bu iki alanda yapılan ispatları karşılaştırabilme imkânı sunabilir. Ayrıca ispat yapmaya yönelik yapılacak nicel çalışmalar için bu testin oldukça kullanışlı olduğu düşünülmektedir.

http://dx.doi.org/10.23891/efdyyu.2017.9 ISSN:1305-020

Makalenin Bilimdeki Konumu

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü/ Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

Makalenin Bilimdeki Özgünlüğü

Bu çalışma matematik öğretmenlerinin ispat yapmaya yönelik becerilerini belirlemeye yönelik teşhis testi geliştirmek amacıyla yapılmıştır. Geliştirilen test matematik öğretmenlerine ve matematik öğretmen adaylarına yönelik yapılacak nitel çalışmalarda örneklemi tespit etme açısından faydalı olabilir. Ayrıca ispat becerisi ile çeşitli değişkenler arasındaki ilişkiyi incelemeye yönelik yapılacak çalışmalar için de bu ölçme aracından yararlanılabileceği düşünülmektedir.

Kaynakça

Akkuş, O. ve Duatepe-Paksu, A. (2006). Orantısal akıl yürütme becerisi testi ve teste yönelik dereceli puanlama anahtarı geliştirilmesi. *Eurasian Journal of Educational Research, 25*, 1-10.

Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates' interaction with prof: Some implications for mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(6), 869-890.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

http://dx.doi.org/10.23891/efdyyu.2017.9 ISSN:1305-020

Başol, G. (2015). *Eğitimde ölçme ve değerlendirme* (3. b.). Ankara: Pegem Akademi.

Baykul, Y. (2015). *Eğitimde ve psikolojide ölçme: Klasik test teorisi ve uygulaması* (3. b.). Ankara: Pegem Akademi.

Berggren, J. L. (1990). Proof, pedagogy, and the practice of mathematics in medieval Islam. *Interchange, 21*(1), 36-48.

Cevizci, A. (2005). *Paradigma felsefe sözlüğü* (6. b.). İstanbul: Paradigma Yayıncılık.

Cooney, T. J., Sanchez, W. B. & Ice, N. F. (2001). Interpreting teachers' movement toward reform in mathematics assessment. *The Mathematics Educator, 11*(1), 10-14.

Çepni, S. (2007). Performansların değerlendirilmesi. E. Karip (Ed.), *Ölçme ve değerlendirme* içinde (s. 193-239). Ankara: Pegem A Yayıncılık.

Dede, Y. (2013). Matematikte ispat: Önemi, çeşitleri ve tarihsel gelişimi. İ. Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A. Delice (Ed.), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* içinde (s. 15-35). Ankara Pegem Akademi.

Dede, Y. ve Karakuş, F. (2014). Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: Kuramsal bir çalışma. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi, 4*(2), 47-71.

Doruk, M. & Kaplan, A. (2015). Prospective mathematics teachers' difficulties in doing proof and causes of their struggle with proofs. *Journal of Bayburt Education Faculty, 10*(2), 315-328.

Doruk, M. & Kaplan, A. (2015). The relation among pre-service mathematics teachers' conceptual knowledge, opinions regarding proof and proof skills. *Mevlana International Journal of Education, 5*(1), 45-57.

Erkuş, A. (2012). *Psikolojide ölçme ve ölçek geliştirme-I: Temel kavramlar ve işlemler* (1. b.). Ankara: Pegem Akademi.

http://dx.doi.org/10.23891/efdyyu.2017.9 ISSN:1305-020

Fennema, E. & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147-164). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Field, A. (2009). Discovering statistics using SPSS (3rd ed.). London: Sage Publication

Fitzgerald, J. F. 1996). Proof in mathematics education. *The Journal of Education, 178*(1), 35-45.

Güler, G. (2014). Analysis of the prof processes of pre-service teachers regarding function concept. *International Journal of Education and Research, 2*(11), 161-176.

Güler, G. ve Ekmekci, S. (2016). Matematik öğretmeni adaylarının ispat değerlendirme becerilerinin incelenmesi: Ardışık tek sayıların toplamı örneği. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi, 11*(1), 59-83.

Güven, B., Çelik, D. ve Karataş, İ. (2005). Ortaöğretimdeki çocukların matematiksel ispat yapabilme durumlarının incelenmesi. *Çağdaş Eğitim, 316*, 35-45.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' prof schemes: Results from exploratory studies. *Research in Collegiate Mathematics Education, 3*(7), 234-282.

İnam, B. ve Uğurel, I. (2016). İspat kavrama testine dayalı bir öğretim uygulamasında karşılaşılan güçlükler ve sürece müdahale yolları. *Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 12*(1), 1-21.

İpek, S. (2010). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının dinamik geometri yazılımları kullanarak gerçekleştirdikleri geometrik ve cebirsel ispat süreçlerinin incelenmesi* (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Hacettepe Üniversitesi, Ankara.

Kubiszyn, T. & Borich, G. D. (2013). *Educational testing and measurement: Classroom application and practice* (10th ed.). Hoboken, NJ: John & Sons, Inc.

http://dx.doi.org/10.23891/efdyyu.2017.9 ISSN:1305-020

Lo, J. J. & Luo, F. (2012). Prospective elementary teachers' knowledge of fraction division. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*(6), 481-500

McMillan, J. W. & Schumacher, S. (2014). *Research in education: Evidence-based inquiry* (7th ed.). Boston: Pearson.

Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E. ve Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *14*(1), 147-160.

Rice, L. A. (2014). *Pre-service secondary mathematics teachers' thinking in prof and argumentation* (Unpublished doctoral dissertation). University of Wyoming, Wyoming.

Seçer, İ. (2015). *Psikolojik test geliştirme ve uyarlama süreci: SPSS ve LISREL uygulamaları.* Ankara: Anı Yayıncılık.

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? *The Mathematics Teacher, 78*, 448-456.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

The National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Uğurel, I., Moralı, S., Koyunkaya, M. Y. & Karahan, Ö. (2016). Pre-service secondary mathematics teachers' behaviors in the proving process. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *12*(2), 203-301.